Auswertung Versuch 15:

Schiefe Ebene

von: Jonas Schweer

am: 24.09.24

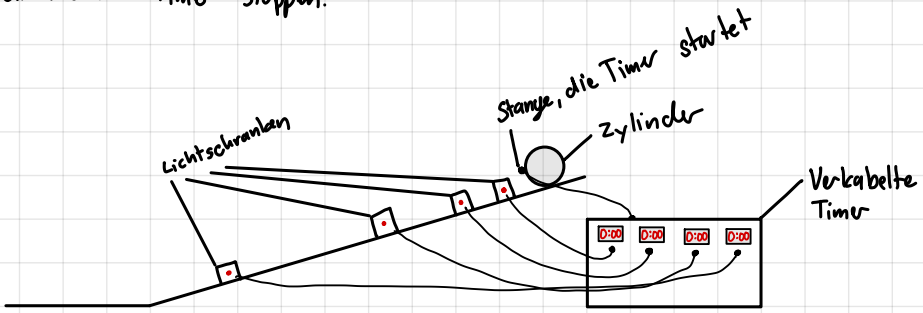
1. Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch wollen wir mithilfe einer Lichtschrankenmessung die Beschleunigung von zwei Zylindern bestimmen um sie mit der vorhergesagten, berechneten Beschleunigung zu vergleichen. Anschließend wollen wir noch eine Geschwindigkeitsmessung durchführen, und so die Energieaufteilung im Zylinder untersuchen.

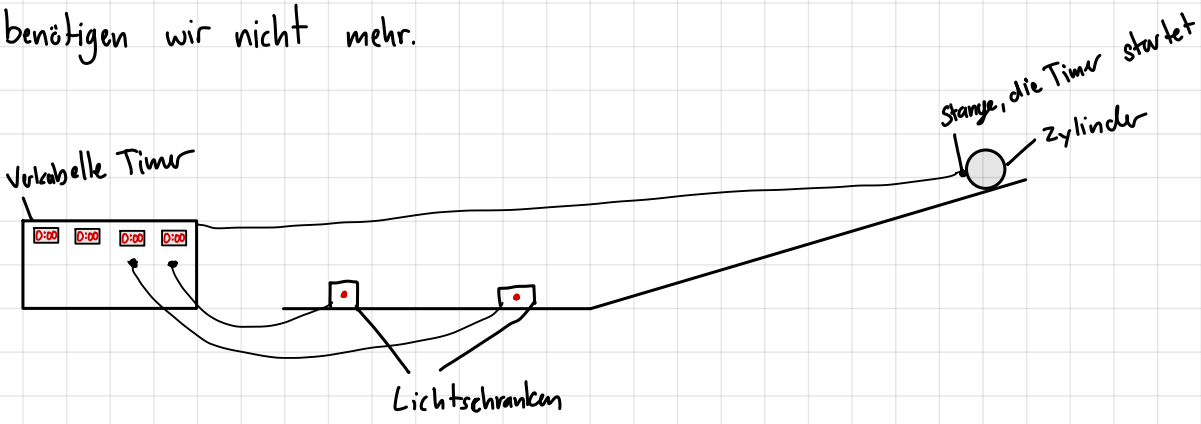
1.2 Messaufbau

Bei der ersten Messung wollen wir die Beschleunigung der Zylinder bestimmen. Dafür bauen wir eine Rampe mit konstanter Steigung (die schiefe Ebene) auf. Am oberen Ende dieser wird eine Stange platziert, die die Zylinder vom rollen abhält und die vier Timer startet, wenn sie entfernt wird. Entlang der folgenden Rollstrecke werden in quadratischen 4 Lichtschranken platziert, die jeweils einen dieser Timer stoppen.



Skizze 1: Messaufbau für Beschleunigungsmessung

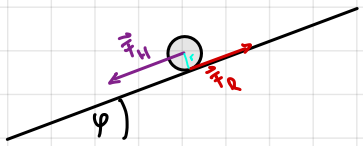
Für die zweite Messreihe platzieren wir die Lichtschranken um. Zwei von ihnen platzieren wir auf dem horizontalen Teil der Rollbahn. Die anderen Beiden benötigen wir nicht mehr.



Skizze 2: Geschwindigkeitsmessung

1.3 Physikalische Grundlagen

Um diesen Versuch durchzuführen, müssen wir zuerst die Physik hinter dem rollenden Zylinder klären. Wenn man einen Zylinder auf eine schiefe Ebene, fängt dieser aufgrund der wirkenden Gewichts- und Reibungskraft an diese herunterzurollen. Die Reibung sorgt dabei für das nötige Drehmoment:



Skizze 3: Kräfte, die Zylinder bewegen

Das Drehmoment berechnet sich also so:

$$M = F_R \cdot r \qquad (1)$$

Für das Drehmoment gilt auch analog zu $F = m \cdot a$ der Translation:

$$M = I\dot{\omega} \qquad (2)$$

Setzen wir nun (1) und (2) gleich und ersetzen die Winkelgeschwindigkeit ω mit $\omega = \frac{v}{r}$ erhalten wir für die Reibungskraft:

$$F_R = \frac{I}{r^2}\dot{v} \qquad (3)$$

Wenn wir uns nun in Skizze 3 anschauen, welche Kraft für die Translation des Körpers verantwortlich ist, und diese mit $F_{trans} = m \cdot a$ gleichsetzen erhalten wir:

$$m \cdot a = F_H - F_R = mg\sin\varphi - \frac{I}{r^2}a \qquad (4)$$

Hier ist m die Masse des Zylinders, g die Erdbeschleunigung, I das Trägheitsmoment des Zylinders, r sein Radius, φ der Neigungswinkel der Ebene und a die Beschleunigung des Zylinders. Stellen wir (4) nach a um, können wir die Beschleunigung berechnen als:

$$a = \frac{mg\sin\varphi}{m + \frac{I}{r^2}} \qquad (5)$$

Sie ist also konstant und es folgt, dass $s \propto t^2$, wenn Startposition und

Startgeschwindigkeit gleich 0 sind.

Um nun die Energie des rollenden Zylinders zu berechnen, können wir uns erneut die analogie zwischen translation und rotation zu nutze machen und so von E_{trans} auf E_{rot} schließen:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6)$$

Da die Gesamtenergie des Körpers hier $E = E_{trans} + E_{rot} + E_{pot}$ ist, können wir sie nun mit:

$$E_{ges} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgh \qquad (7)$$

bestimmen, wobei m die Masse, v die Translationsgeschwindigkeit, I das Trägheitsmoment, ω die Winkelgeschwindigkeit und h die Höhe des Körpers ist und g die wieder die Erdbeschleunigung.

Die beiden wichtigen Trägheitsmomente dieses Versuches sind die eines Vollzylinders und eines Hohlzylinders. Berechnen kann man diese mit:

$$I = \int_V r \cdot \rho(r) \, dV \qquad (8)$$

Für den Vollzylinder mit homogener Masseverteilung gilt also:

$$I_{Voll} = \frac{1}{2} m r^2 \qquad (9)$$

r ist der Radius des Zylinders.

Ein Hohlzylinder mit homogener Massendichte hat das Trägheitsmoment:

$$I_{Hohl} = \frac{1}{2} m (r_a^2 - r_i^2) \qquad (10)$$

r_a ist hier der äussere Radius und r_i der innere Radius des Zylinders.

Versuch 15: Schiefe Ebene

12.09.24

Harish Mahendran
Jonas Schweer
Manuel Sorgenfrei

Messinstrumente:
- Schiefe Ebene
- 4 Lichtschranken
- Phywe Zeitmessgerät
- 3 Zylinder [Vollzylinder, Verbundzylinder, Hohlzylinder]

$\sin(\alpha) = \frac{h}{100,7 - 10,8}$

Steigung der Bahn: 6,1567°

Abmessungen:
Länge der Bahn: $(100,7 \pm 0,1)$ cm
Höhe der Bahn: $(10,8 \pm 0,1)$ cm
Länge schiefe Rollstrecke: $(87,3 \pm 0,1)$ cm

	Durchmesser [cm]	Fehler Durchmesser [cm]	Masse m [g]	Innendurchmesser [cm]
Vollzylinder	5	0,05	444,03 ± 0,1	
Verbundzylinder	5	0,05	442,54 ± 0,1	
Hohlzylinder	5	0,05	442,32 ± 0,1	4 ± 0,05

Wir platzieren die vier Lichtschranken bei den 5_{cm}- 20_{cm}- 45_{cm}- 80 cm Markierungen und messen die Zeit, bis die Zylinder die Schranke erreichen 5 mal pro Zylinder (nicht der Verbundzylinder)

Vollzylinder

Zeit bis Lichtschranke	1 [s]	2 [s]	3 [s]	4 [s]
Durchlauf 1	0,398	0,765	1,154	1,524
Durchlauf 2	0,401	0,768	1,157	1,527
Durchlauf 3	0,387	0,755	1,145	1,516
Durchlauf 4	0,390	0,758	1,148	1,518
Durchlauf 5	0,404	0,771	1,159	1,530

Hohlzylinder

Zeit bis Lichtschranke	1 [s]	2 [s]	3 [s]	4 [s]
Durchlauf 1	0,434	0,841	1,274	1,689
Durchlauf 2	0,439	0,848	1,278	1,694
Durchlauf 3	0,444	0,838	1,264	1,677
Durchlauf 4	0,429	0,836	1,268	1,683
Durchlauf 5	0,434	0,842	1,274	1,689

Wir platzieren nun 2 Lichtschranken 30 cm auseinander auf dem flachen Teil der Rampe und messen die Zeiten 5 mal pro Zylinder

Vollzylinder:

	Zeit 1 [s]	Zeit 2 [s]	ΔT [s]
Durchlauf 1	1,663	1,936	0,273
Durchlauf 2	1,678	1,950	0,272
Durchlauf 3	1,665	1,938	0,273
Durchlauf 4	1,662	1,934	0,272
Durchlauf 5	1,663	1,936	0,273

$\bar{t} = 0{,}2726\ s$

$\sigma = 5 \cdot 10^{-4}\ s$

Hohlzylinder

	Zeit 1 [s]	Zeit 2 [s]	
Durchlauf 1	1,856	2,162	0,306
Durchlauf 2	1,837	2,145	0,308
Durchlauf 3	1,841	2,149	0,308
Durchlauf 4	1,843	2,151	0,308
Durchlauf 5	1,849	2,159	0,31

$\bar{t} = 0{,}308\ s$

$\sigma = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ s$

Zuletzt lassen wir alle Zylinder gemeinsam rollen und notieren die Reihenfolge des Ankommens:

1. Vollzylinder
2. Vollzylinder
3. Hohlzylinder

Aufgabe 1: Bestimmung der Beschleunigung a aus einem $s-t^2$ Diagramm.

Um ein $s-t^2$-Diagramm zeichnen zu können, müssen wir zuerst unsere 5 Messungen pro Zylinder mitteln und dann quadrieren. Der Fehler der quadrierten zeit wird mit $\Delta(\bar{t}^2) = \frac{\partial(\bar{t}^2)}{\partial t}\Delta t = 2\bar{t}\,\sigma_{\bar{t}}$ berechnet:

Lichtschranke Nummer	s[cm]	$\bar{t}$ [s]	$\sigma_{\bar{t}}$ [s]	$\bar{t}^2$ [s²]	Δt^2 [s²]
1	5	0,396	0,007	0,157	0,006
2	20	0,763	0,007	0,582	0,011
3	45	1,153	0,006	1,329	0,014
4	80	1,523	0,006	2,320	0,018

Tabelle 1: Vollzylinder-Daten für Diagramm

Lichtschranke Nummer	s[cm]	$\bar{t}$ [s]	$\sigma_{\bar{t}}$ [s]	$\bar{t}^2$ [s²]	Δt^2 [s²]
1	5	0,436	0,006	0,190	0,005
2	20	0,841	0,005	0,707	0,008
3	45	1,272	0,006	1,618	0,015
4	80	1,686	0,007	2,843	0,024

Tabelle 2: Hohlzylinder-Daten für Diagramm

Diese Messwerte können wir nun nutzen, um sie in das Diagramm aufzutragen

Diagramm 1: Strecke in Abhängigkeit von t^2 des Vollzylinders

Grün: Ausgleichsgerade
Lila: Fehlergerade

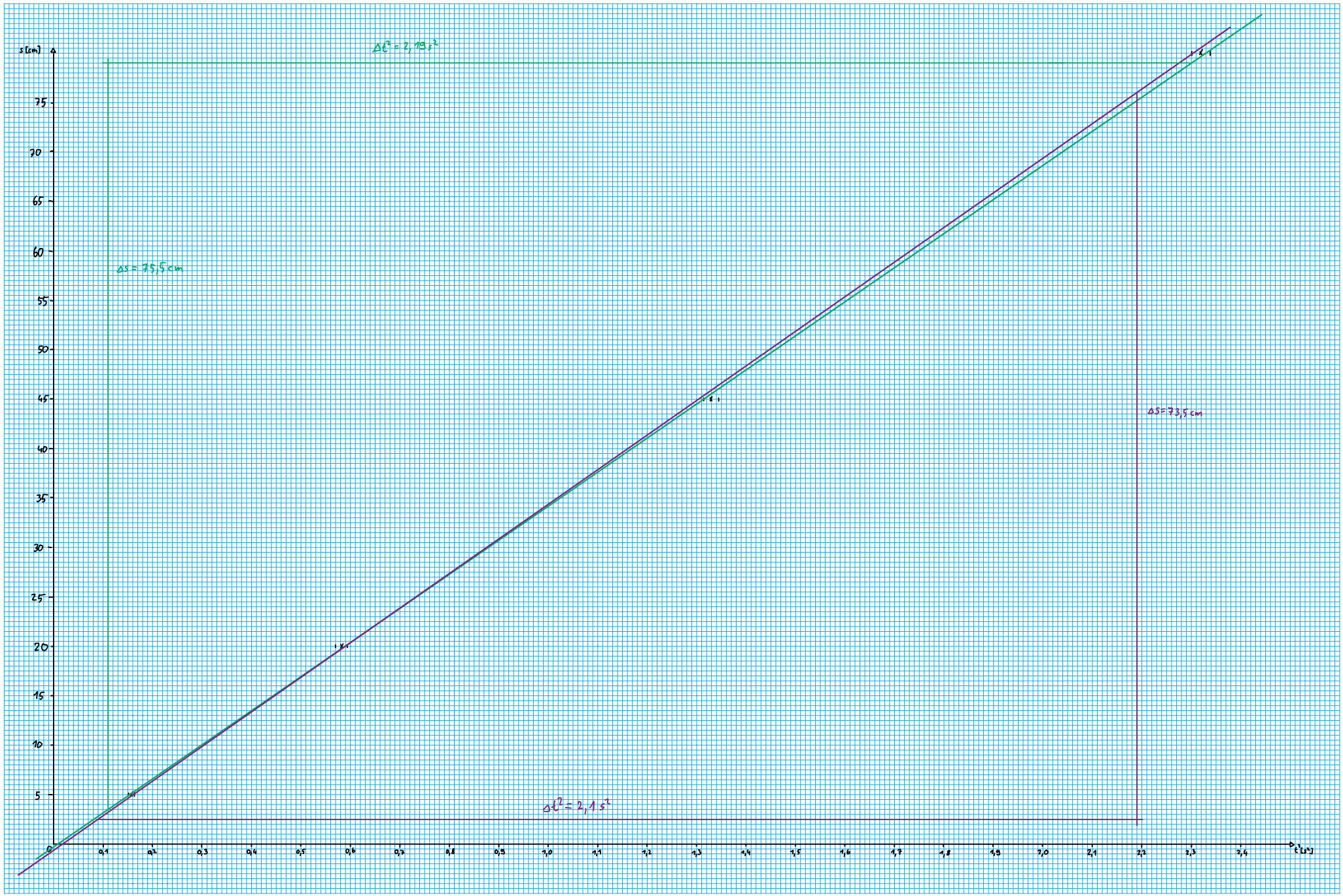
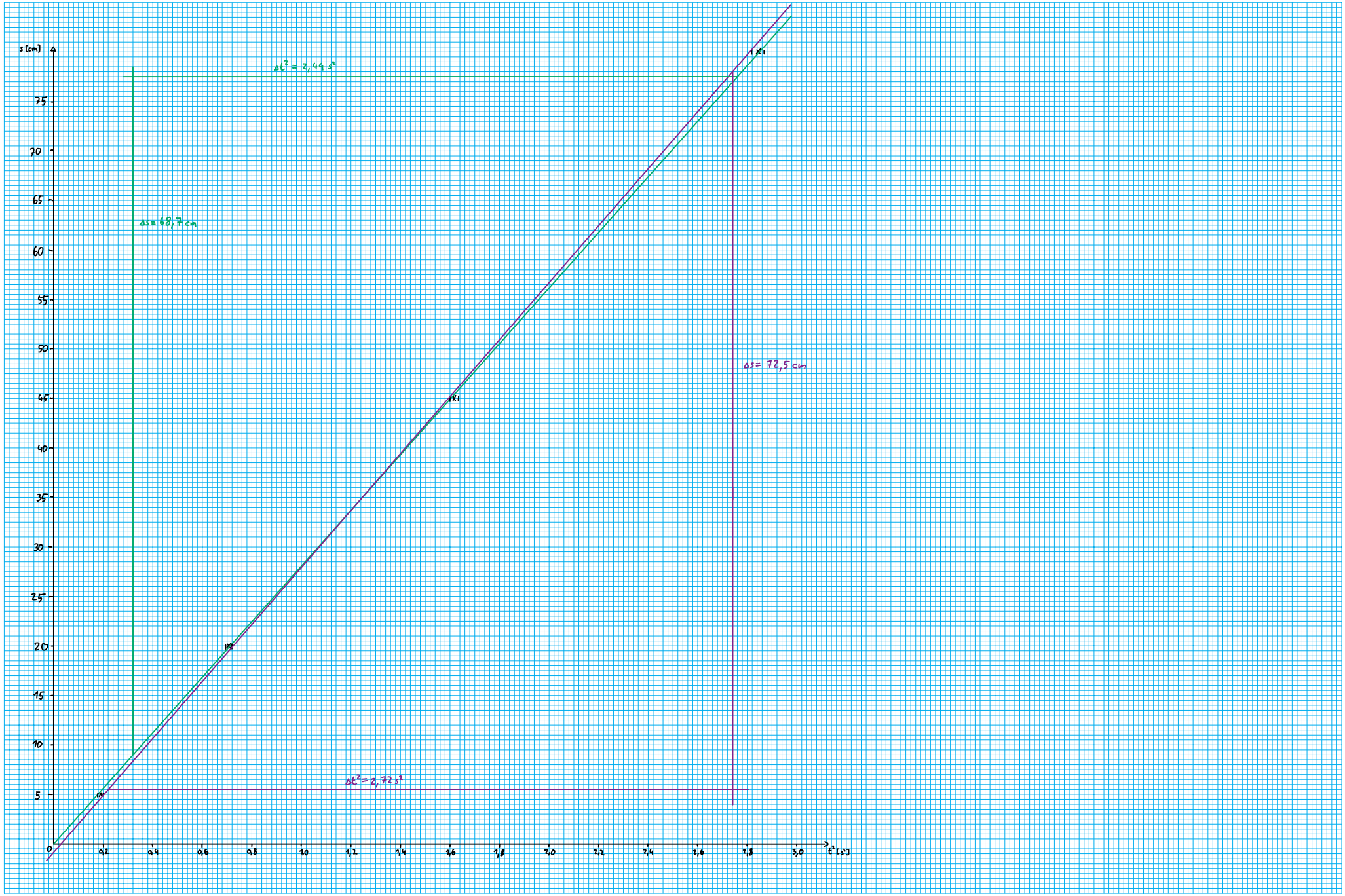


Diagramm 2: Strecke in Abhängigkeit von t^2 des Hohlzylinders

Grün: Ausgleichsgerade

Lila: Fehlergerade



Da die Kraft, die auf den Zylinder wirkt konstant ist, und somit auch seine Beschleunigung konstant ist, lässt sich $s(t)$ wie folgt bestimmen:

$$s(t) = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \qquad (11)$$

Stellen wir dies nun nach a um, können wir die Beschleunigung folgendermaßen bestimmen:

$$a = 2 \frac{\Delta s}{\Delta t^2} \qquad (12)$$

Wir lesen also die Steigung des Graphen ab und verdoppeln sie. So erhalten wir einen Wert für die Beschleunigung. Für die Steigungen ergibt sich:

Vollzylinder: - Ausgleichsgerade: $\frac{\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{75{,}5\,cm}{2{,}19\,s^2} = 34{,}4749 \frac{cm}{s^2}$

- Fehlergerade: $\frac{\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{73{,}5\,cm}{2{,}1\,s^2} = 35 \frac{cm}{s^2}$

- Letztendliche Steigung: $\frac{\Delta s}{\Delta t^2} = (34{,}5 \pm 0{,}5) \frac{cm}{s^2}$

Hohlzylinder: - Ausgleichsgerade: $\frac{\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{68{,}7\,cm}{2{,}44\,s^2} = 28{,}1557 \frac{cm}{s^2}$

- Fehlergerade: $\frac{\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{72{,}5\,cm}{2{,}72\,s^2} = 26{,}6544 \frac{cm}{s^2}$

- Letztendliche Steigung: $\frac{\Delta s}{\Delta t^2} = (28{,}1 \pm 1{,}5) \frac{cm}{s^2}$

Nun verdoppelt folgt für die Beschleunigung der Körper:

Vollzylinder: $a = (69 \pm 1{,}0) \frac{cm}{s^2}$

Hohlzylinder: $a = (56 \pm 3) \frac{cm}{s^2}$

Nun wollen wir anhand der Masse und der Geometrie die Beschleunigung bestimmen und die beiden Ergebnisse vergleichen.

Nutzen wir Formel (9), um das Trägheitsmoment eines Vollzylinders zu berechnen, und setzen es in (5) ein, so erhalten wir für die Beschleunigung des Schwerpunktes die Formel:

$$a_{s,v} = \frac{mg \sin\varphi}{m + \frac{\frac{1}{2} m r^2}{r^2}} = \frac{2}{3} g \sin\varphi \qquad (13)$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung und φ der Winkel zwischen schiefer Ebene und der horizontalen.

Nutzen wir nun für den Hohlzylinder Formel (10) und setzen sie in (5) ein, erhalten wir stattdessen:

$$a_{s,H} = \frac{mg\sin\varphi}{m + \frac{m(r_i^2 + r_a^2)}{2r_a^2}} = \frac{2g\sin\varphi}{3 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \quad (14)$$

Dabei ist g und φ das selbe wie in (13), r_i der Innenradius und r_a der Aussenradius.

Für die Fehler ergibt sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung jeweils:

$$\Delta a_{s,V} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sin(\varphi)\,\Delta g\right)^2 + \left(\frac{2}{3}g\cos\varphi\,\Delta\varphi\right)^2} \quad (15)$$

$$\Delta a_{s,H} = \sqrt{\left[\frac{2\sin\varphi}{3+\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}\Delta g\right]^2 + \left[\frac{2g\cos\varphi}{3+\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}\Delta\varphi\right]^2 + \left[\frac{4g\,r_i\sin\varphi}{\left(3+\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right)^2 \cdot r_a^2}\Delta r_i\right]^2 + \left[\frac{4g\sin\varphi\, r_i^2}{\left(3+\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right)^2 r_a^3}\Delta r_a\right]^2} \quad (16)$$

Als Werte nutzen wir:

$r_i = (2 \pm 0{,}025)\,\text{cm}$

$r_a = (2{,}5 \pm 0{,}025)\,\text{cm}$

$g = (980{,}984 \pm 2\cdot 10^{-3})\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ [Quelle: Heidelberger Standardwert aus Versuch 14, Jens Wagner 2024]

Es fehlt noch φ, welches berechnet wird als

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{h}{L}\right) \quad (17)$$

Wobei h die Höhe der Bahn und L die Länge der Bahn ist. Der Fehler folgt demnach als:

$$\Delta\varphi = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{L^2-h^2}}\Delta h\right]^2 + \left[\frac{h}{L}\frac{1}{\sqrt{L^2-h^2}}\Delta L\right]^2}$$

φ ist so gegeben als:

$\varphi = (6{,}1568 \pm 0{,}0010)^\circ$

Nun berechnen wir also die Beschleunigung

$a_{s,V,\text{Best}} = 70{,}140\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

$\Delta a_{s,V} = 0{,}011\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

$\Rightarrow \underline{a_{s,V} = (70{,}140 \pm 0{,}011\,\frac{\text{cm}}{\text{s}})}$

$a_{s,H,\text{Best}} = 57{,}8\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

$\Delta a_{s,H} = 1{,}3\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

$\Rightarrow \underline{a_{s,H} = (57{,}8 \pm 1{,}3)\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}$

Der Vergleich der berechneten Beschleunigungen erfolgt in der Diskussion.

Aufgabe 2: Berechnung der kinetischen Energie und Vergleich mit potentieller Energie

Die kinetische Energie setzt sich aus der Translationsenergie und der Rotationsenergie zusammen.

Nach (6) kann man sie also wie folgt berechnen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I \omega_s^2 = \frac{v_s^2}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \qquad (18)$$

Dabei ist v_s die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, m die Masse des Zylinders, I das Trägheitsmoment des Zylinders und r_a der äußere Radius. Mit (9) und (10) eingesetzt erhalten wir für E_{kin}:

Vollzylinder: $E_{kin,V} = \frac{3}{4} m v_s^2 \qquad (19)$

Hohlzylinder: $E_{kin,H} = m \frac{v_s^2}{4}\left(3 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right) \qquad (20)$

r_i ist der Innenradius des Hohlzylinders

Der Fehler berechnet sich nach Gauß:

$$\Delta E_{kin,V} = \frac{3}{4}\sqrt{\left(v_s^2 \Delta m\right)^2 + \left(2 m v_s \Delta v_s\right)^2} \qquad (21)$$

$$\Delta E_{kin,H} = \sqrt{\left[\frac{v_s^2}{4}\left(3 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right)\Delta m\right]^2 + \left[\frac{m v_s}{2}\left(3 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right)\Delta v_s\right]^2 + \left[m \frac{v_s^2}{2 r_a^2} r_i \Delta r_i\right]^2 \ldots + \left[m \frac{v_s^2}{2} \frac{r_i^2}{r_a^3} \Delta r_a\right]^2} \qquad (22)$$

Vorher müssen wir allerdings v berechnen. Dazu mitteln wir die Zeitdifferenzen Δt die wir in der Horizontale gemessen haben. Um auf die Geschwindigkeit zu kommen, rechnen wir:

$$v = \frac{s}{\bar{t}} \qquad (23)$$

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{s}{\bar{t}^2} \Delta t\right)^2} \qquad (24)$$

Wir erhalten:

	$\bar{t}$ [s]	$\Delta\bar{t}$ [s]	s [cm]	Δs [cm]	v [$\frac{cm}{s}$]	Δv [$\frac{cm}{s}$]
Vollzylinder	0,2726	0,0005	30	0,5	110,1	1,8
Hohlzylinder	0,3080	0,0013	30	0,5	97,4	1,7

Tabelle 3: Berechnung der Geschwindigkeit der Zylinder

Nun können wir die kinetischen Energien berechnen:

	E_{kin} [J]	ΔE_{kin} [J]
Vollzylinder	0,404	0,013
Hohlzylinder	0,382	0,014

Als Letztes müssen wir noch die potentielle Energie bestimmen. Dafür müssen wir die Höhen-differenz, die die Zylinder durchlaufen berechnen:

$$h = L_R \sin(\varphi) \qquad (25)$$

wobei h die Höhe und L_R die Länge der Rollbahn ist.

Es folgt:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot L_r \cdot \sin\varphi$$

$$\Delta E_{pot} = \sqrt{[g L_r \sin\varphi \, \Delta m]^2 + [m L_r \sin\varphi \, \Delta g]^2 + [m g \sin\varphi \, \Delta L_r]^2 + [m g L_r \cos\varphi \, \Delta\varphi]^2}$$

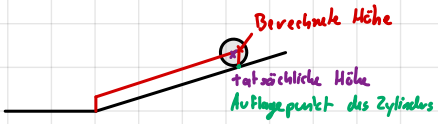
Also für die Zylinder:

	E_{pot} [J]	ΔE_{pot} [J]
Vollzylinder	0,4078	0,0005
Hohlzylinder	0,4063	0,0005

4. Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch haben wir zuerst durch 4 verschieden platzierte Lichtschranken die Beschleunigung eines Hohlzylinders und eines Vollzylinders messen können.
Bei einer zweiten Messreihe haben wir dann die Lichtschranken umplatziert, um so einen Wert für die Geschwindigkeit am Fuße des Berges zu erhalten.
Mit diesem konnten wir die kinetische Energie berechnen.

Vergleichen wir nun die gemessenen und die berechneten Werte für die Beschleunigung, erhalten wir eine $1{,}1\sigma$-Abweichung für den Vollzylinder und eine $0{,}6\sigma$-Abweichung für den Hohlzylinder.
Die gemessene und errechnete Beschleunigung unterscheidet sich also in beiden Fällen nicht signifikant.
Zwar ist die Abweichung für den Vollzylinder größer, jedoch ist das auf den kleineren Fehler zurückzuführen.
Vergleichen wir für Aufgabenteil 2 die kinetische und potentielle Energie, welche laut Energieerhaltung äquivalent sein sollten, erhalten wir für den Vollzylinder eine $0{,}29\sigma$-Abweichung und für den Hohlzylinder eine $1{,}7\sigma$-Abweichung.
Wieder handelt es sich in beiden Fällen um keine signifikante Abweichung, jedoch lässt sich die größere Abweichung diesmal nicht auf den unterschiedlichen Fehler zurückzuführen. Meine Vermutung für den Ursprungs der Abweichung ist es, dass sich der Winkel der Ebene während der Messung etwas verschoben hat, da wir doch etwas an der Ebene gewackelt haben beim Zylinder platzieren.
Des weiten wurde die potentielle Energie fälschlich groß berechnet, da sich der Schwerpunkt des Zylinders etwas unter dem berechneten h befindet.



Skizze 4: Fehler der Höhe

Allerdings ist dieser Fehler vermutlich vernachlässigbar klein aufgrund des kleinen Winkels der Ebene.

Alles in Allem bin ich mit unseren Messwerten. Keiner der gemessenen Werte unterscheidet sich signifikant von dem berechneten Gegenstück, sie werden also sehr nah an den tatsächlichen Echtwerten liegen.

Bei erneutem Durchführen würde ich vor Allem genauer auf die Vermessung des Aufbaus Wert legen. Auch würde ich darauf achten, dass diese Vermessung während des Versuches konstant bleibt. Bei der Auswertung würde ich für den Graphen ein Computer-programm nutzen, da so Abschätzfehler vermieden werden.